2017.7.4

ベクトル解析・物理数学1　第2回レポート問題

締切り　7月11日(火) 5時 (厳守!!)、　提出先　学務課理学部係
具体的な計算過程も全て記すこと。

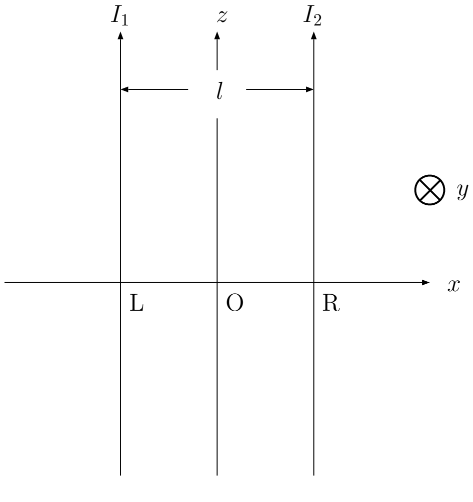
I. 下の左図のように無限に長い平行な2本の直線上を、大きさ I_1, I_2 $(I_1 > 0,\ I_2 > 0)$ の電流が流れている。直線間の距離を l とする。2本の電流に垂直な平面上に x, y 軸をとり、この平面を $z = 0$ とする。電流 I_1, I_2 と平面との交点をそれぞれ、L: $(-\frac{l}{2}, 0, 0)$, R: $(\frac{l}{2}, 0, 0)$ とする。x, y 平面上の点 P: $(x, y, 0)$ において、電流 I_1, I_2 が作る磁場をそれぞれ $\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2$ とし、それらの向きを $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ とする。但し、$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ は単位ベクトル。$\boldsymbol{r}_1 = \overrightarrow{\mathrm{LP}},\ \boldsymbol{r}_2 = \overrightarrow{\mathrm{RP}}$ とし、z 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{k} = (0, 0, 1)$ とする。

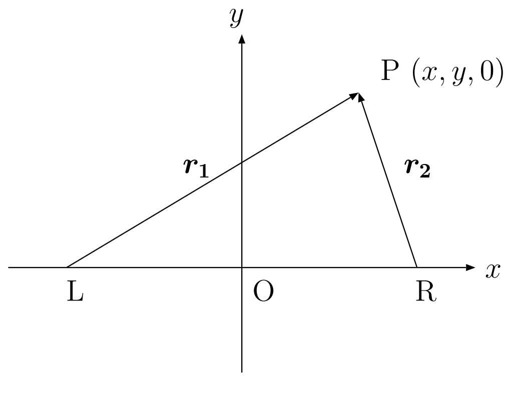
磁場を $\boldsymbol{H}$，電流密度を $\boldsymbol{i}$ としたとき，マックスウェルの方程式の一つは，

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{i}$$

で与えられる。以下の問いに答えよ。

(1) $\boldsymbol{e}_1$ を $\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{r}_1$ を用いて表せ。また、$\boldsymbol{e}_2$ を $\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{r}_2$ を用いて表せ。
(2) $\boldsymbol{H}_1$ を $r_1 = |\boldsymbol{r}_1|,\ I_1,\ \boldsymbol{e}_1$ を用いて表せ。
また、$\boldsymbol{H}_2$ を $r_2 = |\boldsymbol{r}_2|,\ I_2,\ \boldsymbol{e}_2$ を用いて表せ。
(3) 磁場 $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{H}_2$ が0になる点をすべて求めよ。





II. 内径 R_1、外径 $R_2(> R_1)$ の中空の球を考える。半径が R_1 と R_2 の部分には電荷 Q が一様に分布している。球の中心を原点Oとして下図のように座標系をとる。

電場を $\boldsymbol{E}$，電荷密度を ρ，真空の誘電率を ε_0 としたとき，マックスウェルの方程式の一つは，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1}$$

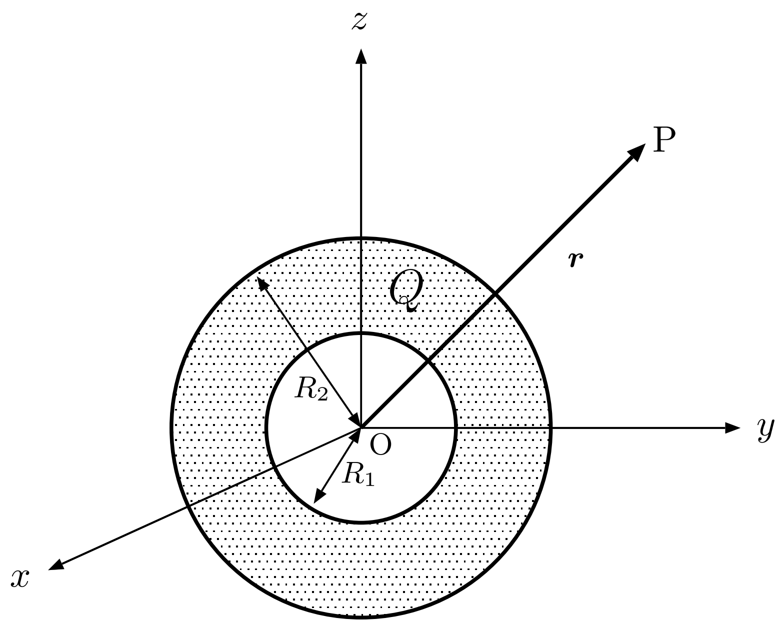
で与えられる。座標 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ の点 P における電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を球座標系での基底ベクトル $\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta,\boldsymbol{e}_\phi$ を用いて,

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=E_r\boldsymbol{e}_r+E_\theta\boldsymbol{e}_\theta+E_\phi\boldsymbol{e}_\phi$$

と表す。式 (1) とガウスの定理を用いることにより，電場の成分 E_r,E_θ,E_ϕ を

(a) 球の外側 $(R_2<r)$　(b) 球の内部 $(R_1<r<R_2)$　(c) 中空部分 $(r<R_1)$

の場合について求めよ。ここで，$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ である。



III. 円筒座標系において、曲線座標は $(q_1,q_2,q_3)=(\rho,\phi,z)$ である。

1. デカルト座標系での座標 (x,y,z) を円筒座標系の座標 (ρ,ϕ,z) で表せ。
2. $i=1,2,3$ について，$\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q_i}$ を計算せよ。
3. $\boldsymbol{f}_i=\dfrac{1}{h_i}\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q_i},\ h_i=|\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q_i}|$ とする。h_1,h_2,h_3 を求めよ。また，$\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3$ は規格直交系をなすことを示せ。

IV. 次のことを証明せよ。

1. エルミート行列の固有値は実数である。
2. エルミート行列の異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する。