

2011年8月9日(火)

熱の物理学 追試験問題

具体的な計算過程も全て記すこと。

I. 熱力学の第一法則は、

$$dU = d'Q + d'W \quad (1)$$

と表される。ここで、 dU 内部エネルギーの増分、 $d'Q$ は系が吸収した熱量、 $d'W$ は系になされる仕事である。特に、準静的な場合は、 $d'Q = TdS$ 、さらに静水圧 p が働く場合は、 $d'W = -pdV$ となる。従って

$$dU = TdS - pdV \quad (2)$$

となる。以下の問いに答えよ。

1. 式 (2) より、

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_V, \quad p = - \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_S \quad (3)$$

を示せ。

2. $\frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V} = \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial S}$ を用いて、マックスウェルの関係式

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_S = - \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_V \quad (4)$$

を示せ。

3. エンタルピー $H = U + pV$ の全微分を求め、 T と V を H の偏微分で表せ。また、前問と同様にして、 H を S と p で偏微分したものが偏微分の順序によらないことより、マックスウェルの関係式を求めよ。
4. ヘルムホルツの自由エネルギー $F = U - TS$ の全微分を求め、 p と S を F の偏微分で表せ。また、マックスウェルの関係式を求めよ。
5. ギブズの自由エネルギー $G = U - TS + pV$ の全微分を求め、 V と S を G の偏微分で表せ。また、マックスウェルの関係式を求めよ。

II. 二つの物体 A、B が、始め別々の温度 $T_A, T_B (T_A < T_B)$ で平衡状態にあった。この二つの物体を外部とは孤立させて接触させたところ、最終的に平衡状態となり、同じ温度 T_F になった。物体 A、B の熱容量をそれぞれ C_A, C_B で一定として以下の問いに答えよ。

1. $T_F = \frac{C_A T_A + C_B T_B}{C_A + C_B}$ を示せ。
2. 物体 A のエントロピー変化 $\Delta S_A = \int_{T_A}^{T_F} \frac{C_A}{T} dT$ を求めよ。
3. 物体 B のエントロピー変化 $\Delta S_B = \int_{T_B}^{T_F} \frac{C_B}{T} dT$ を求めよ。
4. 全系 A+B の エントロピー変化 $\Delta S = \Delta S_A + \Delta S_B$ を $t = \frac{T_A}{T_B} < 1$ の関数と
 考えて t で微分し、 $t < 1$ のとき、 $\frac{d}{dt} \Delta S < 0$ となることを示せ。
5. $\Delta S > 0$ を示せ。

III. 理想気体について，ボイルの法則

$$pV = f(T) \tag{5}$$

とジュールの法則

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = 0 \tag{6}$$

より、 $pV = aT$ を導く。ここで、 a は定数。

1. $dU = TdS - pdV$ より、

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p \tag{7}$$

を示せ。但し，Maxwell の関係式 $\left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$ を用いよ。

2. ボイルの法則より， $\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$ を計算して (7) に代入し、さらにジュールの法則を用いて

$$\frac{df(T)}{dT} = \frac{f(T)}{T} \tag{8}$$

を導け。

3. (8) を積分して f を求め、(5) に代入して $pV = aT$ を導け。ここで、 a は定数。