2013年 8月1日（木)

物理数学１ 試験問題

具体的な計算過程も全て記すこと。

I. デカルト座標を $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, x_3)$ とし，$\boldsymbol{A}(x_1, x_2, x_3)$ を，各成分，A_1, A_2, A_3 が C^2 級のベクトル場とする。 次の式を証明せよ。(ヒント　$(\nabla \times \boldsymbol{A})_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} A_k$.)

(1) $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$,　(2)$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A}$

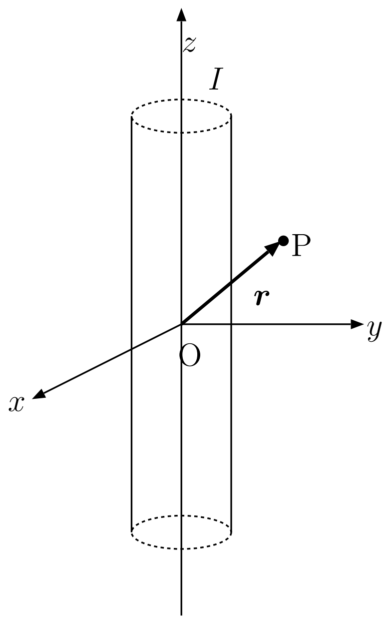
II. 無限に長い中空の円筒の表面に大きさ I の定常電流が流れている。ここで，円筒の断面は，半径 a の円であるとする。電流は円筒表面を一様に流れているとし，円筒の中心軸を z 軸とする。また，電流の向きを z 軸の正の方向とする。下図参照。

磁場を $\boldsymbol{H}$，電流密度を $\boldsymbol{i}$ としたとき，マックスウェルの方程式の一つは,

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{i}$$

で与えられる。この式とストークスの定理を用いることにより，円筒座標 $\boldsymbol{r} = (\rho, \phi, z)$ の点Pにおける，定常電流による磁場 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ の円筒座標系での成分 $H_\rho(\boldsymbol{r}), H_\phi(\boldsymbol{r}), H_z(\boldsymbol{r})$ を，以下の２つの領域について求めよ。

(a) 円筒の外側 $(a < \rho)$　(b) 円筒の内側 $(\rho < a)$



III. 真空中に置かれた内径 R_1、外径 $R_2(> R_1)$ の中空の導体球を考える。導体球には電荷 Q が与えられている。球の中心を原点Oとして図のように座標系をとる。

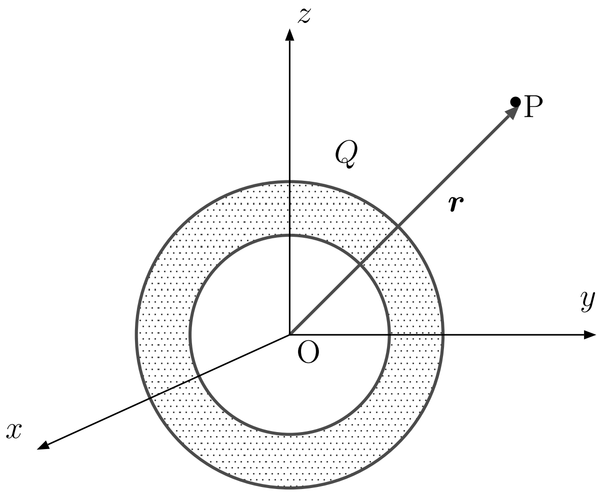
電場を $\boldsymbol{E}$，電荷密度を ρ，真空の誘電率を ε_0 としたとき，マックスウェルの方程式の一つは,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

で与えられる。この式とガウスの定理を用いることにより，座標 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ の点Pにおける電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を

(a) 球の外側 $(R_2 < r)$　(b) 球の内部 $(R_1 < r < R_2)$　(c) 中空部分 $(r < R_1)$

の場合について求めよ。ここで，$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ である。



IV. 球座標系において，曲線座標は $(q_1, q_2, q_3) = (r, \theta, \phi)$ である。以下の問いに答えよ。

1. デカルト座標系での座標 (x, y, z) を球座標系の座標 (r, θ, ϕ) で表せ.

2. $i = 1, 2, 3$ について，$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}$ を計算せよ.

3. 曲線座標系において 2 点間の距離の二乗を $ds^2 = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} g_{ij} dq_i dq_j$ とするとき，リーマン計量 g_{ij} は次式で与えられる.

$$g_{ij} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_j} \right).$$

   $g_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$ を計算して，球座標系が直交座標系であることを示せ.

4. 直交座標系における公式 $\boldsymbol{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}$ を適用して, 球座標系での基底ベクトル, $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\phi$ を求めよ．$h_i = \sqrt{g_{ii}}$.

V. 次のことを証明せよ。

1. 成分が複素数からなる列ベクトル (1 行 n 列）や行列（n 行 n 列）について考える。2 つのベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}$ の内積は,

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i$$

   で定義される。ここで，T は転置を，$*$ は複素共役を意味する。任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して，$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A^\dagger \boldsymbol{y})$ が成り立つ行列 $A^\dagger$ を A のエルミート共役行列という。

$$(A^\dagger)_{ij} = A_{ji}^*$$

   を示せ。ここで、A_{ij} は行列 A の ij 成分である。

2. ユニタリ行列の固有値の絶対値は１である。