2011 年 8 月 4 日（木)

物理数学１ 試験問題

具体的な計算過程も全て記すこと。

I.

(1) デカルト座標を $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, x_3)$ とし，$\boldsymbol{A}(x_1, x_2, x_3)$ を，各成分，A_1, A_2, A_3 が C^2 級のベクトル場とする。 次の式を証明せよ。

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$$

(2) 閉曲線 C とそれの囲む領域 D の面積 $|D|$ について，次式が成り立つことを示せ。

$$|D| = \frac{1}{2}\int_C (xdy - ydx)$$

(グリーンの定理あるいはストークスの定理を用いる。)

この式を用いて，楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ の囲む領域の面積が πab となることを示せ。

（$x = a\cos\phi, y = b\sin\phi,\ \phi \in [0, 2\pi)$ とパラメータ表示する。)

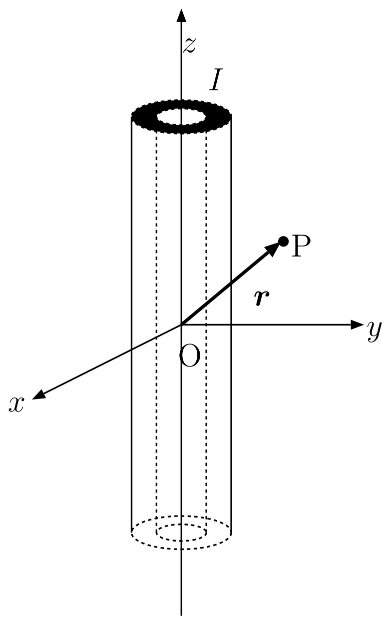
II. 無限に長い中空の導線内を大きさ I の定常電流が流れている。ここで，導線の断面は，中心が同一の，半径 a の円と半径 b の円の間の部分であるとする。($a < b$)。電流は導線内を一様に流れているとし，導線の中心軸を z 軸とする。また，電流の向きを z 軸の正の方向とする。下図参照。

磁場を $\boldsymbol{H}$，電流密度を $\boldsymbol{i}$ としたとき，マックスウェルの方程式の一つは,

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{i}$$

で与えられる。この式とストークスの定理を用いることにより，円筒座標 $\boldsymbol{r} = (\rho, \phi, z)$ の点 P における，定常電流による磁場 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ の円筒座標系での成分 $H_\rho(\boldsymbol{r}), H_\phi(\boldsymbol{r}), H_z(\boldsymbol{r})$ を，以下の 3 つの領域について求めよ。

(a) 導線の外側 ($b < \rho$)　(b) 導線内 ($a < \rho < b$)　(c) 中空部分 ($\rho < a$)。



III. 半径 R の球に電荷 Q が一様に分布している。球の中心を原点 O として下図のように座標系をとる。

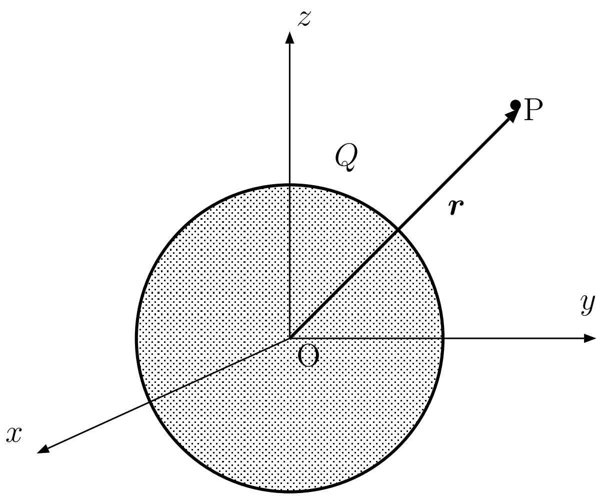
電場を $\boldsymbol{E}$，電荷密度を ρ，真空の誘電率を ε_0 としたとき，マックスウェルの方程式の一つは，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

で与えられる。この式とガウスの定理を用いることにより，座標 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ の点 P における電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を

(a)$r > R$　(b)$r < R$

の場合について求めよ。ここで，$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ である。



IV. 球座標系において，曲線座標は $(q_1, q_2, q_3) = (r, \theta, \phi)$ である。以下の問いに答えよ。

1. デカルト座標系での座標 (x, y, z) を球座標系の座標 (r, θ, ϕ) で表せ。また，dx, dy, dz を $dr, d\theta, d\phi$ で表せ。

2. 曲線座標系において 2 点間の距離を $ds^2 = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} g_{ij} dq_i dq_j$ とするとき，球座標系で g_{ij} を求めよ。

3. 一般的な公式 $\boldsymbol{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}$ を適用して, 球座標系での基底ベクトル，$\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\phi$ を求めよ。ここで，$h_i = \sqrt{g_{ii}}$。

V. 次のことを証明せよ。

1. 成分が複素数からなる列ベクトル (1 行 n 列）や行列（n 行 n 列）について考える。2 つのベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)^T, \boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_n)^T$ の内積は，

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i$$

で定義される。ここで，^{T} は転置を，* は複素共役を意味する。任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して，$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A^\dagger \boldsymbol{y})$ が成り立つ行列 $A^\dagger$ を A のエルミート共役行列という。

$$(A^\dagger)_{ij} = A_{ji}^*$$

を示せ。ここで、A_{ij} は行列 A の ij 成分である。

2. エルミート行列の固有値は 実数である.