2012年7月26日（木)

物理数学１ 試験問題

具体的な計算過程も全て記すこと。

I. $\boldsymbol{r} = (x, y, z),\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ として，次の微分演算を行え．

(1) $\nabla \dfrac{1}{r}$, (2) $\nabla \cdot \dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$

II. C^2 級のスカラー場 $\psi(x, y, z)$ について，次のことを示せ．

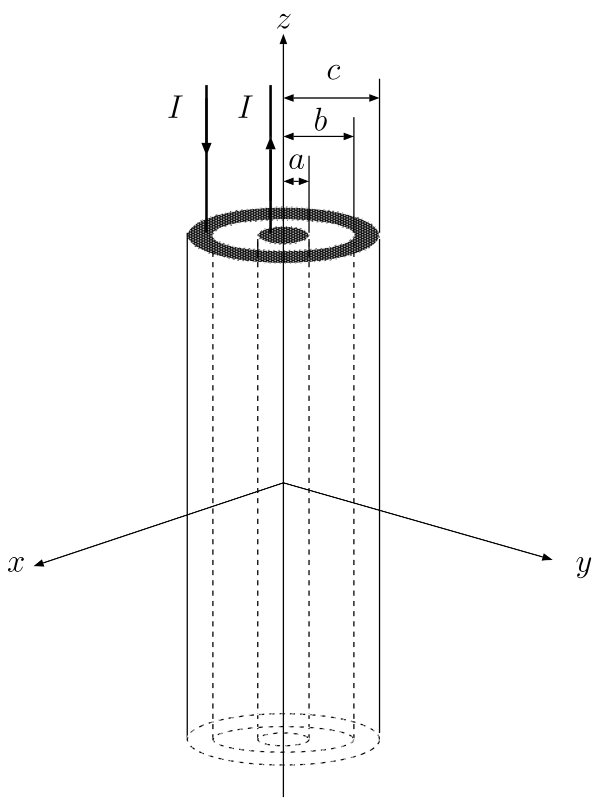
$$\nabla \times (\nabla \psi) = \boldsymbol{0}.$$

III. 図のように，内径 b，外径 c の無限に長い中空円筒導体内に，それと同じ中心軸を持つ半径 a の無限に長い円筒導体が配置されている．共通の中心軸を z 軸として，図の向きを z 軸の正の向きにとる．内側の円筒導体には強さ I の定常電流が z 軸の正の向きに，中空の円筒導体には強さ I の定常電流が z 軸の負の向きに、ともに，導体内を一様に流れているとする．

磁場を $\boldsymbol{H}$，電流密度を $\boldsymbol{i}$ としたとき，マックスウェルの方程式の一つは，

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} \tag{1}$$

で与えられる



円筒座標を $\boldsymbol{r}=(\rho,\phi,z)$ とし，磁場 $\boldsymbol{H}$ の円筒座標系での成分を (H_ρ,H_ϕ,H_z) とする．マックスウェルの方程式 (1) を用い，さらにストークスの定理を' 適用 'して，次の領域における磁場 $(H_\rho(\boldsymbol{r}),H_\phi(\boldsymbol{r}),H_z(\boldsymbol{r}))$ を求めよ。

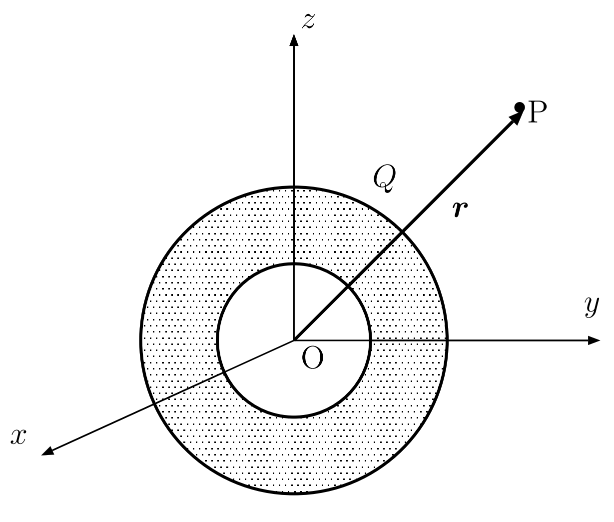
(a) $\rho<a$ (b) $a\le\rho<b$ (c) $b\le\rho<c$ (d) $c\le\rho$

IV. 内径 R_1、外径 $R_2(>R_1)$ の中空の球を考える。半径が R_1 と R_2 の間の部分には電荷 Q が一様に分布している。球の中心を原点 O として下図のように座標系をとる。電場を $\boldsymbol{E}$，電荷密度を ρ，真空の誘電率を ε_0 としたとき，マックスウェルの方程式の一つは,

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2}$$

で与えられる．球座標を $\boldsymbol{r}=(r,\theta,\phi)$ とし，電場 $\boldsymbol{E}$ の球座標系での成分を (E_r,E_θ,E_ϕ) とする．マックスウェルの方程式 (2) を用い，さらにガウスの定理を' 適用 'して，次の領域における電場 (E_r,E_θ,E_ϕ) を求めよ.

(a) 球の内部 $(r\le R_1)$ (b) 中空部分 $(R_1<r\le R_2)$ (c) 球の外側 $(R_2<r)$



V. 円筒座標系において，曲線座標は $(q_1,q_2,q_3)=(\rho,\phi,z)$ である。以下の問いに答えよ。

1. デカルト座標系での座標 (x,y,z) を円筒座標系の座標 (ρ,ϕ,z) で表せ。また, dx,dy,dz を $d\rho,d\phi,dz$ で表せ。

2. 曲線座標系において 2 点間の距離を $ds^2=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}g_{ij}dq_idq_j$ とするとき，円筒座標系で g_{ij} を求め，直交座標系であることを示せ。

3. 直交座標系における公式 $\boldsymbol{e}_i=\dfrac{1}{h_i}\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q_i}$ を適用して, 円筒座標系での基底ベクトル，$\boldsymbol{e}_\rho,\boldsymbol{e}_\phi,\boldsymbol{e}_z$ を求めよ。ここで，$h_i=\sqrt{g_{ii}}$。

VI. 次のことを証明せよ。

1. エルミート行列の固有値は 実数である.

2. ユニタリ行列の固有値の絶対値は 1 である.