

情報統計力学追試験問題

定義.

サイコロ投げのように、起こりうる現象（1の目が出るなど）の集合を Ω とし、標本空間という。サイコロ投げなら、 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ である。ただし、ここで、1は1の目が出ることを表す。 Ω の部分集合 A を事象と呼ぶ。事象の集合 \mathcal{F} が次の性質を満たすとす。

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F}$ ならば、 $A^c \in \mathcal{F}$, ここで、 $A^c = \Omega - A$, つまり、 A の補集合
3. $A_i \in \mathcal{F}$ ($i = 1, 2, \dots$) ならば、 $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

また、 \mathcal{F} の要素 $A \in \mathcal{F}$ に対して次の性質を持つ確率 $P(A)$ が定義されているとする。

1. $P(\Omega) = 1$.
2. $0 \leq P(A) \leq 1$, $A \in \mathcal{F}$.
3. $A_i \in \mathcal{F}$ ($i = 1, 2, \dots$) が背反事象、つまり、 $A_i \cap A_j = \phi$, ($i \neq j$) ならば

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

必修問題

I. 以下を示せ。

1. $P(\phi) = 0$, ここで、 ϕ は空集合。
2. $A, B \in \mathcal{F}$, かつ $A \subset B$ なら、 $P(A) \leq P(B)$.
3. $A, B \in \mathcal{F}$ が互いに背反、つまり、 $A \cap B = \phi$ なら、 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
4. $A \in \mathcal{F}$ なら、 $P(A^c) = 1 - P(A)$.
5. 事象 A, B について、 $P(A) > 0, P(B) > 0$ とする。 B が起こる条件のもとで A が起こる確率を、事象 B が与えられたときに A が起こる条件付き確率といい、 $P(A|B)$ と書く。これは次のようになる。

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

ベイズの公式

$$P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A) \tag{1}$$

6. 次の等式を示せ。ただし、 $P(B) > 0, P(B^c) > 0$ とする。

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c) \tag{2}$$

II. 大数の法則、中心極限定理、大偏差原理について述べよ。

選択問題 以下の問題から 1 問選択して解答せよ。

III. ベイズの公式の応用。乳がん検診に関する確率の問題を考える。以下のような確率を定義する。

$P(\text{陽性})$: 検診で乳がんと判定される確率。 $P(\text{乳がん})$: 乳がんである確率。

$P(\text{陽性} | \text{乳がん})$: 乳がんであるときに、検診で乳がんであると判定される確率。

$P(\text{乳がん} | \text{陽性})$: 検診で乳がんであると判定されたとき、実際に乳がんである確率。

いま、 $P(\text{陽性} | \text{乳がん}) = 0.9$ とする。つまり、乳がんであるときに、検診で乳がんであると判定される確率が 9 割であるとする。また、実際の乳がんである人の割合は 0.8 パーセント、つまり、 $P(\text{乳がん}) = 0.008$ とする。さらに、乳がんでないのに陽性となる確率が、 $P(\text{陽性} | \text{乳がんでない}) = 0.07$ とする。

(1) $P(\text{陽性}) \simeq 0.08$ となることを示せ。

ヒント. $P(A^c) = 1 - P(A)$ と、式 (2) を用いよ。

(2) ベイズの公式 (1) を用いて、検診で陽性と判定され、実際に乳がんである確率が約 9 パーセント、つまり、 $P(\text{乳がん} | \text{陽性}) \simeq 0.09$ となる事を示せ。

(3) もう一度検査して、再び陽性と判定されたとき、実際に乳がんである確率が、約 5.8 パーセントとなる事を示せ。

IV. グランドカノニカル分布の応用として、気体分子が M 個の孔へ吸着する問題を考える。気体分子の系を、温度 T 、化学ポテンシャル μ の熱浴、粒子浴と考える。1 個の孔の状態は、気体分子が入らないときには、エネルギー 0、気体分子が 1 個入っている時には、エネルギー ε とする。また、2 個以上の気体分子は入れないとする。以下の問いに答えよ。

(1) M 個の吸着孔の大分配関数 Ξ を求めよ。

(2) M 個の吸着孔のうち、気体分子が吸着している孔の数の期待値 $\langle N \rangle$ を計算し、吸着率 $r = \frac{\langle N \rangle}{M}$ が

$$r = \frac{1}{1 + e^{-\beta(\varepsilon + \mu)}}$$

となることを示せ。