2022 年 2 月 3 日 (木)

応用複素解析 試験問題

具体的な計算過程も全て記すこと。

必修問題

I-1. ある領域で正則な複素関数を $f(z) = u(x,y) + iv(x,y),\ \ z = x + iy$ とする。このとき、u, v は、次のコーシー・リーマンの関係式を満たす。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

(1) u, v が、次のラプラス方程式を満たすことを示せ。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

(2) 次の関数が正則か否か判定せよ。また、その理由を示せ。正則な場合、正則となる領域を記せ。

$$(a)\ f = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2},\ (b)\ f = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

(3) ある領域で正則な複素関数を $f(z) = u + iv$ とする。v が y のみの関数のとき、$f(z)$ を求めよ。(ヒント : v がラプラス方程式を満たすこと、及びコーシー・リーマンの関係式を用いる。)

I-2.

(1) a, z を複素数とするとき、z^a は、$z^a = e^{a \log z}$ で定義される。$\log z$ は多価関数なので、z^a も一般に多価関数となる。以下の値を求めよ。

$$(a)\ \log(1 + i\sqrt{3}), \qquad (b)\ i^{1/4}.$$

(2) 次の方程式の解を全て求めよ。

$$(a)\ e^z = -i, \qquad (b)\ \tanh z = 0.$$

II. テイラー級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ において、$\lim_{n\to\infty} |\frac{c_{n+1}}{c_n}| = \frac{1}{R},\ (0 \leq R \leq \infty)$ となるとき、R は、この級数の収束半径である。次の級数の収束半径を求めよ。

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} z^n, \quad (2)\ \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} z^{4n}.$$

III. 次の関数の無限遠点以外の孤立特異点を全て求めよ。各々の孤立特異点について、その種類 (除きうる特異点か、極か、真性特異点か) を理由とともに答えよ。

$$(1)\ \cot z, \quad (2)\ \frac{\cos z}{z-\pi/2}, \quad (3)\ \sinh(\frac{1}{z}).$$

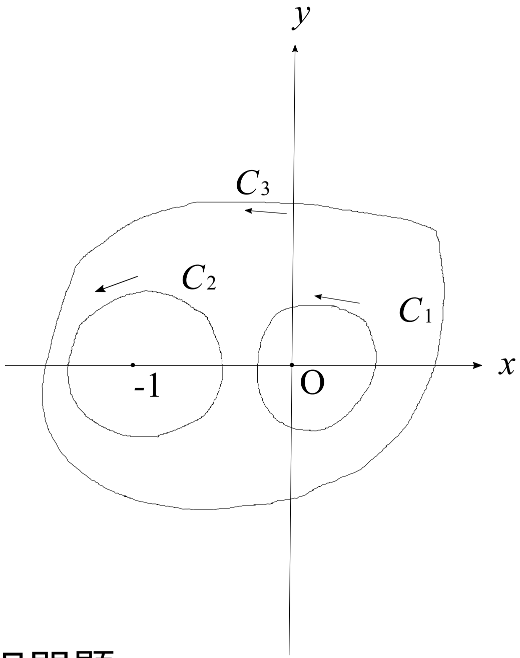
IV. C を始点 z_0、終点が z_1 の任意の曲線とする。次の積分を求めよ。

$$(1)\ \int_c \frac{1}{(z-2)^3}dz$$ 但し、C は点 $z=2$ を通らないとする。 $$(2)\ \int_c \sinh(z)dz.$$

V. 関数 $f(z)=\frac{1}{z^2(z+1)^2}$ について以下の問いに答えよ。

(1) $f(z)$ の無限遠点以外の全ての孤立特異点と、その点における留数を求めよ。

(2) 留数定理を利用して、以下の積分路 C_1, C_2, C_3 に沿う $f(z)$ の線積分を求めよ。但し、向きは図に示した矢印の向きとし、いずれも、1 周する経路とする。



選択問題

以下の 2 問のうちいずれかを選択して回答せよ。

VI-1. C を点 1 のまわりを反時計回りに 1 周する半径1 の円とする。そのパラメータ表示を

$$z(\theta)=e^{i\theta}+1, \quad \theta\in[0,2\pi]$$

とする。n を整数とするとき、C に沿う次の線積分を、全ての n について、パラメータ表示を用いて計算せよ。

$$\int_C (z-1)^n dz$$

VI-2. 複素関数 $f(z)=\frac{1}{z(z-i)}$ の $z=i$ を中心とするローラン展開をすべて求めよ。(ヒント 関数 $f(z)$ は分母が 0 になる点 $z=0$ と $z=i$ の点で正則ではない。$z=i$ を中心として $1<|z-i|$ の領域 A および $0<|z-i|<1$ の領域 B に分けて考える。それぞれの領域では $f(z)$ は正則。)