2021年2月4日(木)

応用複素解析 試験問題

具体的な計算過程も全て記すこと。

必修問題

I-1. ある領域で正則な複素関数を $f(z) = u(x,y) + iv(x,y),\ \ z = x + iy$とする。このとき、$u, v$は、次のコーシー・リーマンの関係式を満たす。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

(1) u, vが、次のラプラス方程式を満たすことを示せ。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

(2) 次の関数が正則か否か判定せよ。また、その理由を示せ。

$$(a) f = x^2 - y^2 - 2ixy, (b)\ f = \frac{1}{x^2 - y^2 + 2ixy}.$$

(3) ある領域で正則な複素関数を $f(z) = u + iv$とする。uがxのみの関数のとき、$f(z)$を求めよ。(ヒント : uがラプラス方程式を満たすこと、及びコーシー・リーマンの関係式を用いる。)

I-2.

(1) a, zを複素数とするとき、z^aは、$z^a = e^{a \log z}$で定義される。$\log z$は多価関数なので、z^aも一般に多価関数となる。以下の値を求めよ。

$$\log(\sqrt{3} + i)$$

(2) 次の方程式の解を全て求めよ。

$$(a)\ e^z = 2i$$

II. テイラー級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$において、$\lim_{n\to\infty} |\frac{c_{n+1}}{c_n}| = \frac{1}{R},\ (0 \le R \le \infty)$となるとき、$R$は、この級数の収束半径である。次の級数の収束半径を求めよ。

$$(1)\ \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} z^{2n} \quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$$

III. nを自然数とする。
zを複素数として、$z^n = i$を満たすzのうち、異なるものはn個ある。それらを、$z_1, z_2, \cdots, z_n$とする。
(1) $z_1, z_2, \cdots, z_n$を求めよ。
(2) $\sum_{k=1}^{n} z_k = 0$を示せ。

IV. 次の関数の無限遠点以外の孤立特異点を全て求めよ。また、各々の孤立特異点について、その種類(除きうる特異点か、極か、真性特異点か)を答えよ。

$$(1)\ \frac{1}{\sin z} \quad (2)\ \cos(\frac{1}{z})$$

V. Cを始点 z_0、終点が z_1 の任意の曲線とする。次の積分を求めよ。

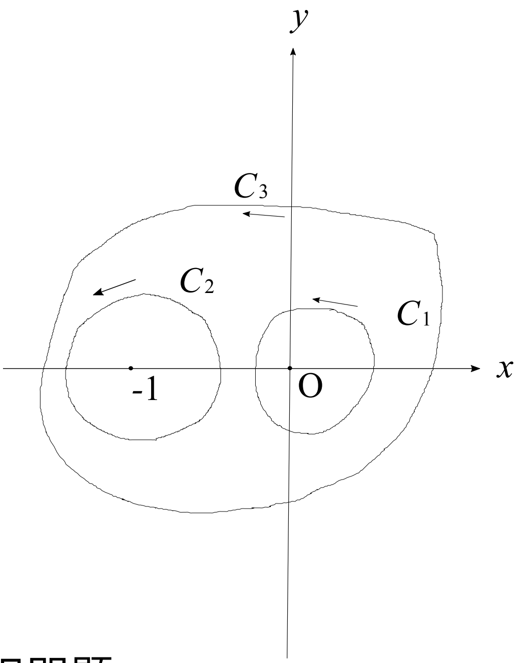
(1) $\displaystyle\int_c \frac{1}{(z+3)^2}dz$　但し、C は点 $z=-3$ を通らないとする。 (2) $\displaystyle\int_c \sin(iz)dz$

VI. 関数 $f(z)=\frac{1}{z(z+1)^2}$ について以下の問いに答えよ。

(1) $f(z)$ の無限遠点以外の全ての孤立特異点と、その点における留数を求めよ。

(2) 積分路 C_1, C_2, C_3 を下図のようにとる。但し、向きは図に示した矢印の向きとし、いずれも、1 周する経路とする。留数定理を利用して、以下の線積分を求めよ。

$$(1)\ \int_{C_1} f(z)dz,\ (2)\ \int_{C_2} f(z)dz,\ (3)\ \int_{C_3} f(z)dz$$



選択問題

以下の 2 問のうちいずれかを選択して回答せよ。

VII-1. Cを点 $\frac{i}{2}$ のまわりを反時計回りに1 周する半径1 の円とする。そのパラメータ表示を

$$z(\theta)=e^{i\theta}+\frac{i}{2},\quad \theta\in[0,2\pi]$$

とする。n を整数とするとき、C に沿う次の線積分を、全ての n について、パラメータ表示を用いて計算せよ。

$$\int_C (z-\frac{i}{2})^n dz$$

VII-2. 複素関数 $f(z)=\frac{1}{z(z-2)}$ の $z=0$ を中心とするローラン展開をすべて求めよ。
ヒント 関数 $f(z)$ は分母が 0 になる点 $z=0$ と $z=2$ の点で正則ではない。$z=0$ を中心として $2<|z|$ の領域 A および $0<|z|<2$ の領域 B に分けて考える。それぞれの領域では $f(z)$ は正則。