2018 年 8 月 6 日 (火)

ベクトル解析・ 物理数学1　試験問題

具体的な計算過程も全て記すこと。

I. デカルト座標を $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, スカラー場を $\phi = \dfrac{1}{r}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$，デカルト座標でのベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A} = (x, z, yz)$ として，次の微分演算の結果がスカラーかベクトルかを答え、その値を求めよ。

(1)　$\nabla\phi$　(2)　$\nabla \cdot \boldsymbol{A}$　(3)　$\nabla \times \boldsymbol{A}$　(4)　$\phi\boldsymbol{A}$

(5)　$\nabla \cdot (\phi\boldsymbol{A})$　(6)　$\nabla \times (\phi\boldsymbol{A})$　(7)　$(\nabla\phi) \times \boldsymbol{A}$　(4)　$(\boldsymbol{A}, \nabla\phi)$

II. 図のように無限に長い軸対称な中空の円筒に大きさ I の定常電流が流れている。円筒の断面は，半径 a と半径 $b(> a)$ の円であるとする。電流は円筒の断面を一様に流れているとし，円筒の中心軸を z 軸とする。また，電流の向きを z 軸の正の方向とする。

磁場を $\boldsymbol{H}$，電流密度を $\boldsymbol{i}$ としたとき，マックスウェルの方程式の一つは，

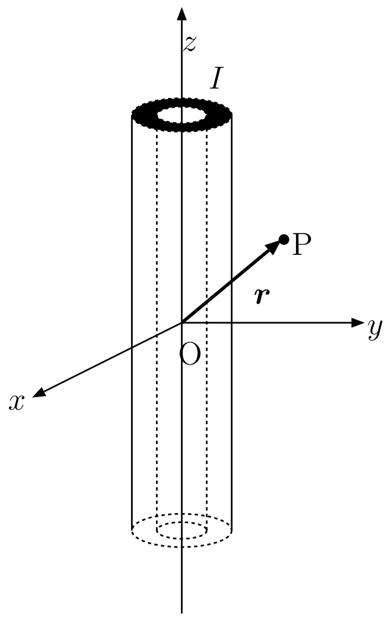
$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{i}$$

で与えられる。円筒座標 $\boldsymbol{r} = (\rho, \phi, z)$ の点 P における，定常電流による磁場 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ を考える。

(1) 点 P における磁場の向きを理由とともに答えよ。

(2) 以下の領域における磁場の大きさを求めよ。

(a) 円筒の外側 $(b < \rho)$　(a) 円筒の内部 $(a < \rho < b)$　(b) 円筒の内側 $(\rho < a)$



III. 図のように，真空中で，x 軸上の点 $\mathrm{a}(-l,0,0)$，点 $\mathrm{b}(l,0,0)$ を中心として，それぞれ電荷 $Q_a(>0)$ で一様に帯電している半径 R_a の球，電荷 $-Q_b,(Q_b>0)$ で一様に帯電している半径 R_b の球が置かれている。R_a, R_b はともに l より小さいとする。真空の誘電率を ε_0 として，以下の問いに答えよ。

(1) 座標 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ の点 P は，2 つの帯電球の外側にあるとする。点 P において，左および右の帯電球が作る電場 $\boldsymbol{E}_a(\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{E}_b(\boldsymbol{r})$ の向きを理由とともに答えよ。

また，その大きさ E_a, E_b が，それぞれ，$E_a=\dfrac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0 r_a^2}, E_b=\dfrac{Q_b}{4\pi\varepsilon_0 r_b^2}$ となることを示せ。ここで，$\boldsymbol{r}_a=\overrightarrow{\mathrm{aP}}, \boldsymbol{r}_b=\overrightarrow{\mathrm{bP}}$，$r_a=|\boldsymbol{r}_a|$，$r_b=|\boldsymbol{r}_b|$ である。

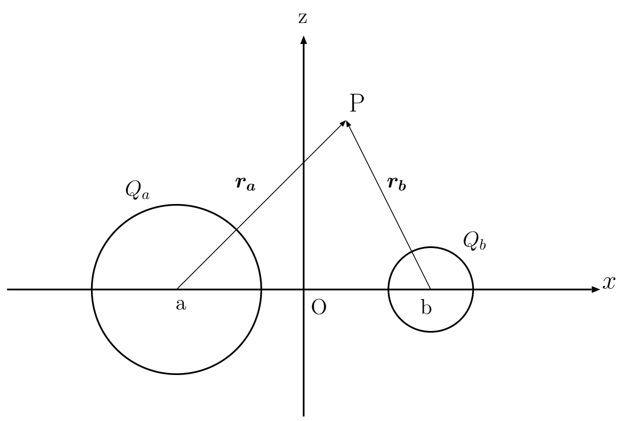
(2) 点 P ににできる電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}_a(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{E}_b(\boldsymbol{r})$ で与えられる。$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=0$ となるのは、x 軸上であることを説明せよ。

(3) $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=0$ となる点の x 座標を x_0 とする。このとき，$r_a=|x_0+l|, r_b=|x_0-l|$ である。

$$\frac{Q_b}{Q_a}=(\frac{r_b}{r_a})^2$$

となることを示せ。

(4) $Q_a>Q_b$ とする。このとき，$x_0>0$ となることを示せ。また，$r_a=\frac{l}{1-\sqrt{\frac{Q_b}{Q_a}}}$ となることを示せ。



V. 円筒座標系において，曲線座標は $(q_1,q_2,q_3)=(\rho,\phi,z)$ である。以下の問いに答えよ。

1. デカルト座標系での座標 (x,y,z) を円筒座標系の座標 (ρ,ϕ,z) で表せ。
2. $i=1,2,3$ について，$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}$ を計算せよ。
3. $\boldsymbol{f}_i=\dfrac{1}{h_i}\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}$，$h_i=|\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}|$ とする。h_1,h_2,h_3 を求めよ。また，$\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3$ は規格直交系をなすことを示せ。

IV. 次のことを証明せよ。

1. エルミート行列の固有値は実数である。
2. ユニタリ行列の固有値の絶対値は1 である。