

応用複素解析 追試験問題

具体的な計算過程も全て記すこと。

必修問題

I-1. ある領域で正則な複素関数を $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$ とする。

(1) 次のコーシー・リーマンの関係式を示せ。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

(2) 次の関数が正則か否か判定せよ。また、その理由を示せ。

$$(a) f = e^{-y} \cos x + ie^{-y} \sin x, \quad (b) f = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + i \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

(3) ある領域で正則な複素関数を $f(z) = u + iv$ とする。 v が x のみの関数のとき、 $f(z)$ を求めよ。(ヒント: v がラプラス方程式を満たすこと、及びコーシー・リーマンの関係式を用いる。)

I-2.

(1) a, z を複素数とするとき、 z^a は、 $z^a = e^{a \log z}$ で定義される。 $\log z$ は多価関数なので、 z^a も一般に多価関数となる。以下の値を求めよ。

$$(a) \log\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right), \quad (b) (-i)^{1/3}.$$

(2) 次の方程式の解を全て求めよ。

$$(a) e^{2z} = \frac{i}{3}, \quad (b) \cosh z = 0.$$

II. テイラー級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ において、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \frac{1}{R}$, ($0 \leq R \leq \infty$) となるとき、 R は、この級数の収束半径である。次の級数の収束半径を求めよ。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} z^n, \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^{3n+1}.$$

III. 次の関数の無限遠点以外の孤立特異点を全て求めよ。各々の孤立特異点について、その種類(除きうる特異点か、極か、真性特異点か)を理由とともに答えよ。

(1) $\tan z$, (2) $\frac{\cos z}{z + \pi/2}$, (3) $\cosh\left(\frac{1}{z}\right)$.

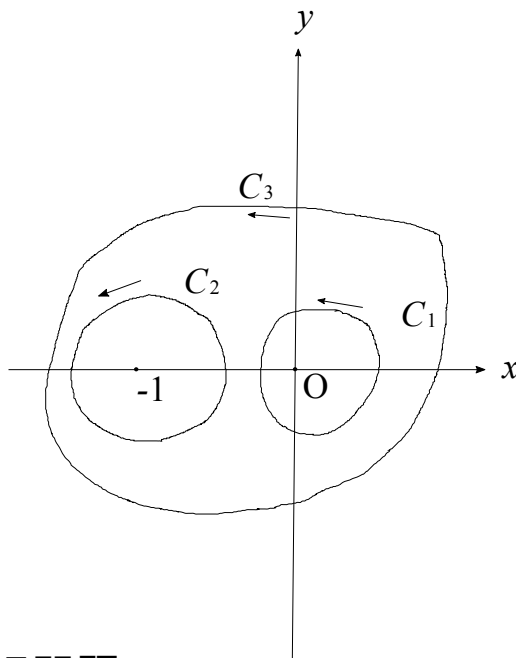
IV. C を始点 z_0 、終点が z_1 の任意の曲線とする。次の積分を求めよ。

(1) $\int_C \frac{1}{(z-1)^4} dz$ 但し、 C は点 $z=1$ を通らないとする。 (2) $\int_C \cosh(z) dz$.

V. 関数 $f(z) = \frac{1}{z(z+1)^2}$ について以下の問いに答えよ。

(1) $f(z)$ の無限遠点以外の全ての孤立特異点と、その点における留数を求めよ。

(2) 留数定理を利用して、以下の積分路 C_1, C_2, C_3 に沿う $f(z)$ の線積分を求めよ。但し、向きは図に示した矢印の向きとし、いずれも、1周する経路とする。



選択問題

以下の2問のうちいずれかを選択して回答せよ。

VI-1. C を点2のまわりを反時計回りに1周する半径1の円とする。そのパラメータ表示を

$$z(\theta) = e^{i\theta} + 2, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

とする。 n を整数とするとき、 C に沿う次の線積分を、全ての n について、パラメータ表示を用いて計算せよ。

$$\int_C (z-2)^n dz$$

VI-2. 複素関数 $f(z) = \frac{1}{z(z-i)}$ の $z=0$ を中心とするローラン展開をすべて求めよ。(ヒント 関数 $f(z)$ は分母が0になる点 $z=0$ と $z=i$ の点で正則ではない。 $z=0$ を中心として $1 < |z|$ の領域 A および $0 < |z| < 1$ の領域 B に分けて考える。それぞれの領域では $f(z)$ は正則。)